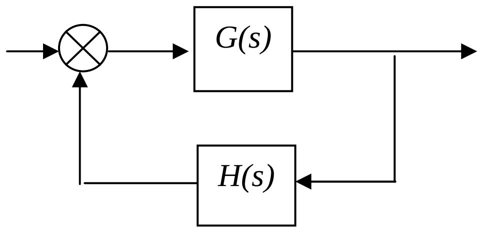
Kriteria Nyquist

Dalam subbab ini, sistem lup tertutup yang akan dikaji seperti ditunjukkan dalam gambar 1. Persamaan karakteristik sistem diberikan oleh persamaan

$$1 + G(s)H(s) = 0$$

Persamaan ini menetukan stabilitas sistem, dan , jika sistem dalam keadaan stabil, maka karakteristik tanggapan transien sangat bermanfaat. Diagram Bode fungsi alih lup terbuka dapat diplot menggunakan fungsi alih $G(j\omega)H(j\omega)$. Dalam subbab ini kita akan menyelediki penentuan stabilitas sistem lup tertutup dari diagram Bode fungsi lup terbuka $G(j\omega)H(j\omega)$. Metode yang digunakan berdasarkan kriteria Nyquist.

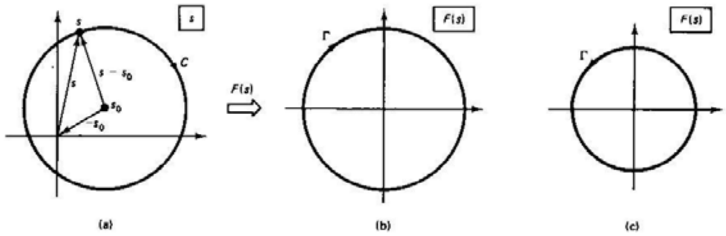


Gambar 1   Sistem lup tertutup

Untuk memperkenalkan kriteria Nyquist, kita perlu mempelajari pemetaan (fungsi) dari bidang kompleks s ke bidang $F(s)$. Sebagai cantoh perhatikan kasus fungsi (pemetaan) $F(s)$ diberikan oleh

$$F(s) = s - s_0 \qquad (1)$$

Dengan s_0 adalah nilai tertentu yang dimungkinkan berupa nilai kompleks. Andaikan kita menginginkan memetakan lingkaran berpusat di s_0 dalam bidang s ke dalam bidang F(s), seperti ditunjukkan dalam gambar 2.



Gambar 2 Pemetaan ke bidang kompleks

Kurva *C* dalam bidang s dalam gambar 2a dipetakan ke kurva Γ dalam bidang *F(s)* dengan menguji *F(s)* untuk titik-titik pada kurva *C* dan melukiskannya nilai-nilai kompleks dalam bidang *F(s).* Untuk fungsi yang sederhana seperti persamaan (1), *F(s)* merupakan vektor sebagaimana ditunjukkan dalam gambar 2(a), dan kurva hasil dalam F(s) terlihat menjadi lingkaran dengan jejari yang sama dengan *C* tetapi berpusat di titik (0,0).

Perhatikan sekarang fungsi berikut

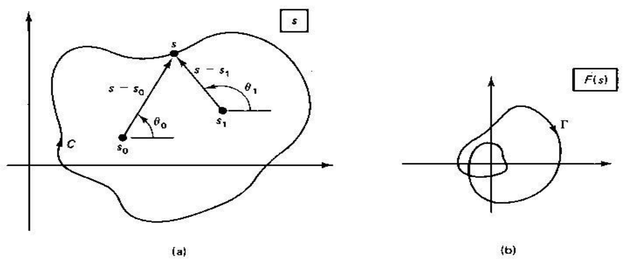
$$F(s) = \frac{1}{s - s_0} \tag{2}$$

yang merupakan fungsi terbalik dari persamaan (2). Jika kurva C dalam gambar 2(a) dipetakan ke bidang F(s) melewati persamaan (2), vektor s-s_0 tetap seperti gambar 2(a). Maka F(s) merupakan kebalikan vektor ini. Magnituda F(s) merupakan kebalikan dari yang ditunjukkan dalam gambar 2(b), dan sudut berupa negatif, Jadi dalam kasus ini, kurva Γ dalam bidang F(s) juga lingkaran, seperti ditunjukkan dalam gambar 2(c), kecuali arah perjalanan sekerang berlawanan dengan jarum jam.Untuk fungsi ini, pelingkupan searah jarum jam suatu pole dalam bidang s mengantarkan pelingkupan berawanan dengan jarum jam suatu titik (0,0) dalam bidang F(s).

Sebagai contoh pemetaan ketiga, andaikan bahwa pemetaan F(s) diberikan oleh

$$F(s) = (s - s_0)(s - s_1) \tag{3}$$

dan andaikan bahwa kurva C dalam bidang s melingkupi kedua zero s_0 dan s_1, seperti dalam gambar 3. Dalam kasus ini kurva C bukanlah sebuah lingkaran. Dua vektor yang yang dimiliki oleh F(s) diperlihatkan dalam gambar 3(a). Ketika titik s mengelilingi kurva C, maka sudut vektor $(s - s_0)$ berubah sebesar -360^0, juga demikian bagi vektor $(s - s_1)$. Oleh karena itu sudut fungsi F(s) berubah -720^0. Pada saat bersaman magnituda dari dua vektor terbatas dna bukan nol. Sehingga kurva Γ haruslah melingkupi titik (0,0) dua kali, seperti diperlihatkan dalam gambar 3(b). Perhatikan bahwa kuva C dalam melingkupi dua zero F(s) searah jarum jam. Dalam bidang F(s), kurva Γ melingkupi titik pusat dua kali.



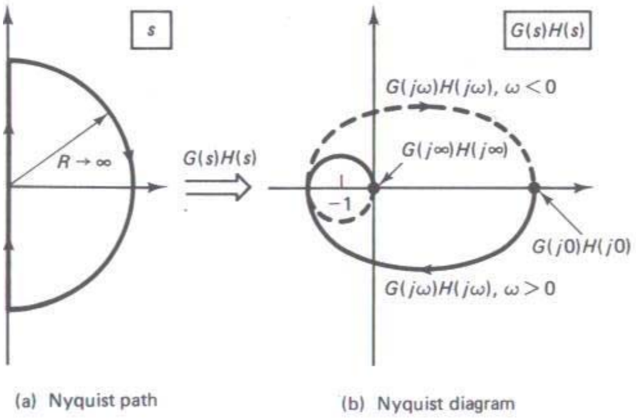
Gambar 3 Jalan pelingkupan dua pole

Jika pemetaan F(s) merupakan bentuk terbalik dari persamaan (3), yaitu jika

$$F(s) = \frac{1}{(s - s_0)(s - s_1)}$$

maka vektor untuk kurva C masih seperti diperlihatkan gambar 3. Karena sudut perkalian dua vektornya berputar - 720^0, maka sudut F(s) berputar mengelilingi 720^0. Oleh karena itu pemetaan ke kurva Γ akan menghasilkan pelingkupan dua kali berlawanan dengan jarum jam.

Kriteria Nyquist dapat dinyatakan dengan rujukan pemetaan seperti diperlihatkan dalam gambar 4.



Gambar 4 Diagram Nyquist

Jalan Nyquist ditunjukkan dalam gambar 4(a). jalan ini dipetakan melalui fungsi lup terbuka G(s)H(s) ke diagram Nyquist, seperti diilustrasikan dalam gambar 4(b). Maka

$$Z = N + P$$

Dengan Z adalah jumlah akar persamaan karakteristik sistem yang berada separoh kanan bidang kompleks, N adalah jumlah pelingkupan searah jarum jam titik –1, dan P adalah jumlah pole fungsi lup terbuka *G(s)H(s)* yang berada di separoh kanan bidang kompleks.

Contoh 11-3 :

Perhatikan sistem dengan fungsi alih lup terbuka berikut

$$G(s)H(s) = \frac{5}{(s+1)^3}$$

maka

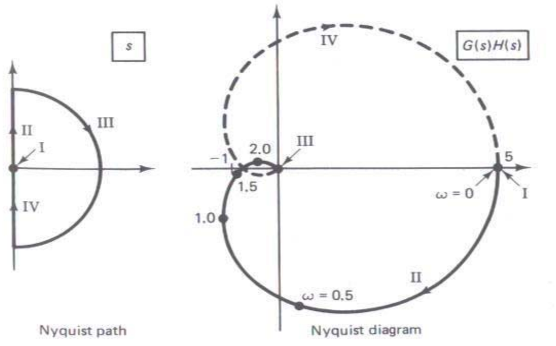
$$G(j\omega) = \frac{5}{(j\omega+1)^3}$$

Nilai fungsi ini untuk berbagai nilai ω tertentu diberikan dalam tabel 1.

Tabel 1 Tanggapan frekuensi contoh 1

ω	|G(jω|	∠G(jω
0	5	0
0.5000	3.5777	-79.6952
1.0000	1.7678	-135.0000
1.5000	0.8534	-168.9298
2.0000	0.4472	-190.3048
5.0000	0.0377	123.9298
20.0000	0.0006	98.5872

Dan plot nilai-nilai ini diperlihatkan dalam gambar 5.



Gambar 5 Kriteria Nyquist untuk contoh

Penguat DC, G(0)H(0), adalah sama dengan 5 dan ditunjukkan sebagai bagian I. Kurva bagian II diperoleh secara langsung penggambaran nilai dalam tabel 1. Karena

$$\lim_{s \to \infty} G(s)H(s) = 0$$

busur tak berhingga dari jalan Nyquist memetakan ke titik pusat dalam bidang G(s)H(s), bagian III dari diagram Nyquist. Untuk ω negatif, kita menggunakan pasangan konjugasi dari nilai yang diberikan dalam tabel 1. Bagian diagram Nyquist ini, bagian IV, diperlihatkan oleh kurva titik-titik dalam gambar 5.

Persamaan Nyquist

$$Z = N + P$$

Nilai P sama dengan 0, karena G(s)H(s) tidak memiliki pole di separoh kanan bidang s. Dari diagram Nyquist kita melihat bahwa jumlah pelingkupan titik –1 dalam bidang G(s)H(s), yaitu N, sama dengan nol. Maka jumlah akar dari persamaan/fungsi karaktersitk di separoh kanan adalah

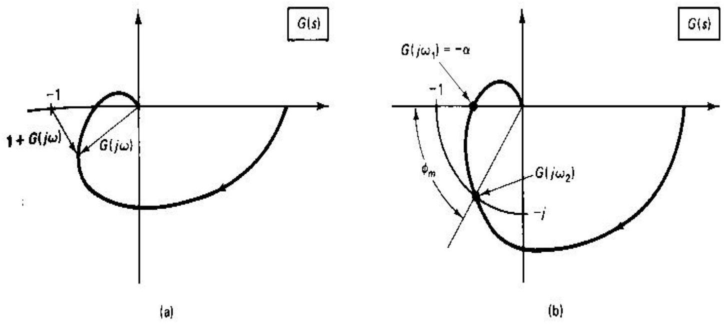
$$Z = N + P = 0 + 0 = 0$$

Dan sistem lup tertutup adalah stabil.

Stabilitas Relatif dan Diagram Bode

Dalam sub bab sebelum ini diperlihatkan diagram Nyquist yang digunakan untuk menentukan apakah sistem stabil atau tidak stabil. Tentu saja, agar suatu sistem dapat bermanfaat, sistem haruslah stabil. Namun demikian, ada yang juga harus diperhatikan dalam masalah stabilitas. Pertama, sistem stabil harus memiliki sejumlah karakteristik tanggapan transien yang dapat diterima. Juga model sistem yang digunakan dalam analisa dan perancangan sistem kontrol tidak pernah pasti. Oleh karena itu, model sistem dapat menunjukkan sistem yang stabil, tetapi pada kenyataannya sistem fisik tidaklah stabil. Umumnya kita memerlukan tidak hanya sistem yang stabil tetapi juga sistem yang stabil dengan beberapa batas keamanan.

Untuk dua alasan ini kita akan mendefinisikan stabilitas relatif bagi sistem. Kita mendefinisikan stabilitas relatif sistem dalam bentuk kedekatan diagram Nyquist ke titik -1 dalam bidang komples. Konsep ini diilustrasikan dalam gambar 6(a).



Gambar 6 Batas stabilitas nisbi

Perhatikan bahwa vektor dari titik –1 ke diagram Nyquist mempunyai nilai [*1 + G(jω)*], dengan anggapan bahwa *G(s)* adalah fungsi lup terbuka. Magnituda terkecil dari vektor ini adalah ukuran yang baik mengenai stabilitas nisbi dari sistem lup tertutup; namun ukuran ini jarang digunakan. Sebagai gantinya adalah dua ukuran yang ditunjukkan dalam gambar 11-16(b) yang umum digunakan.

Batas Penguatan (Gain Margin)

Jika magnituda fungsi alih lup terbuka dari suatu sistem lup tertutup stabil pada penyeberangan -180^0 terhadap diagram Nyquist adalah sebesar α, maka batas penguatan sebesar $1/\alpha$. Jika diagram Nyquist memiliki penyebrangan -180^0 berulang, batas penguatan ditentukan oleh titik yang menghasilkan batas penguatan dengan magnituda terkecil. Frekuensi pada saat mana diagram Nyquist menyebrang -180^0 disebut *frekuensi penyebrangan fasa*.

Batas fasa (Phase Margin)

Batas fasa adalah besarnya sudut terkecil yang mana diagram Nyquist harus berputar agar memotong titik –1 supaya sistem lup tertutup menjadi stabil. Batas fasa ini ditunjukkan oleh sudut ϕ_{pm} dalam gambar 6(b). Magnituda diagram Nyquist, G(jω), berharga satu pada frekuensi terjadinya batas fasa. Frekuensi ini ditunjukkan oleh ω_2

dalam gambar 6(b) dan disebut *frekuensi penyebrangan penguatan*, dan jadi $|G(j\omega_2)|=1$. Maka batas fasa adalah

$$\phi_{PM} = -180^0 + \angle G(j\omega_2)$$

Contoh 2 :

Perhatikan sistem dengan fungsi alih lup terbuka :

$$G(s)H(s) = \frac{1}{s(s+1)^2}$$

Tentukan batas penguatan dan batas fasa sistem ini ?

Penyelesaian :

Tanggapan frekuensi sistem :

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega(j\omega+1)^2}$$

Magnituda dan fasa sebagai fungsi frekuensi :

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\omega(\omega^2+1)} \qquad \angle G(j\omega) = -90^0 - 2\arctan\omega$$

Hasil evaluasi fungsi tanggapan frekuensi terhadap frekuensi diperlihatkan dalam tabel 2.

Tabel 2 Tanggapan frekuensi contoh 2

ω	$\|G(j\omega)\|$	$\angle G(j\omega)$
0,0100	99,9900	-91,1459
0,0200	49,9800	-92,2915
0,0300	33,3034	-93,4367
0,0400	24,9601	-94,5812
0,0500	19,9501	-95,7248
0,0600	16,6069	-96,8673
0,0700	14,2161	-98,0083
0,0800	12,4205	-99,1478
0,0900	11,0218	-100,2855
0,1000	9,9010	-101,4212
0,2000	4,8077	-112,6199
0,3000	3,0581	-123,3985
0,4000	2,1552	-133,6028
0,5000	1,6000	-143,1301

0,6000	1,2255	-151,9275
0,7000	0,9588	-159,9840
0,8000	0,7622	-167,3196
0,9000	0,6139	-173,9744
1,0000	0,5000	-180,0000
2,0000	0,1000	-216,8699
3,0000	0,0333	-233,1301
4,0000	0,0147	-241,9275
5,0000	0,0077	-247,3801
6,0000	0,0045	-251,0754
7,0000	0,0029	-253,7398
8,0000	0,0019	-255,7500
9,0000	0,0014	-257,3196
10,0000	0,0010	-258,5788

Terlihat bahwa diagram menyeberang -180^0 pada frekuensi $\omega = 1$, maka batas penguatannya sebesar 1/0,5 = 12. Sedangkan batas fasa terjadi pada saat magnituda berharga 1 ketika frekuensi berkisar 0,7, maka batas fasa :

$$\phi_{PM} = -180^0 - 160^0 = -340^0 = 20^0$$