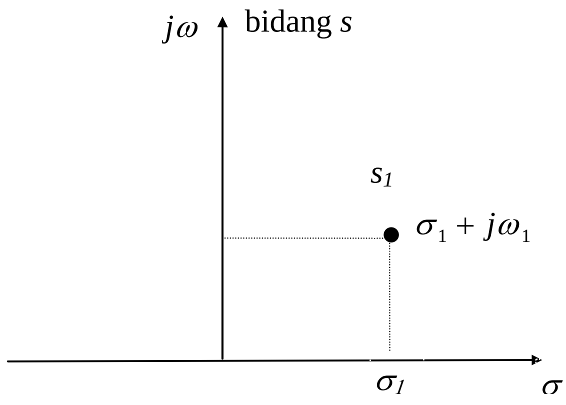
DASAR MATEMATIKA

Untuk mempelajari teori sistem kontrol diperlukan latar belakang matematika

Konsep Peubah Komples

Peubah Komples



Gambar 2-1 Bidang kompleks

Gambar 2-1 menggambarkan bentuk bidang kompleks s, yang mana titik $s = s_1$ didefinisikan oleh koordinat $\sigma = \sigma_1$ dan $\omega = \omega_1$, atau secara sederhana ditulis $s_1 = \sigma_1 + j\omega_1$.

Fungsi Peubah Kompleks

Fungsi $G(s)$ juga digambarkan dalam bagian nyata dan imajiner ; yaitu

$$G(s) = \mathbf{Re}\, G(s) + j\, \mathbf{Im}\, G(s)$$

dengan Re $G(s)$ menunjukkan bagian nyata dari $G(s)$ dan Im $G(s)$ menggambarkan bagian imajiner dari $G(s)$.

Fungsi Analitik

Fungsi $G(s)$ dari peubah kompleks s disebut *fungsi analitik* dalam daerah bidang s jika fungsi dan semua turunan fungsi tersebut ada nilainya dalam daerah bidang s tersebut. Sebagai contoh fungsi berikut

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

adalah *analitik* untuk setiap titik dalam bidang s kecuali pada titik *s* = 0 dan *s* = -1.

Kutub (Pole) suatu Fungsi

Definisi kutub dapat dinyatakan sebagai berikut : *Fungsi G(s) adalah analitik dan bernilai tunggal disekitar* s_i, *maka dikatakan fungsi memiliki sebuah kutub sejumlah r pada* $s = s_i$ *jika limit*

$$\lim_{s \to s_i} [(s - s_i)^r G(s)]$$

memiliki harga terbatas, berharga bukan nol.

Nol (Zero) dari Fungsi

Definisi nol (*zero*) fungsi dapat dinyatakan sebagai berikut : *Jika fungsi G(s) adalah analitik pada* $s = s_i$ *, dikatakan memiliki zero berorde r pada* $s = s_i$ *jika limit*

$$\lim_{s \to s_i} [(s - s_i)^{-r} G(s)]$$

memiliki harga tertentu, nilai bukan nol. Atau, secara sederhana, G(s) memiliki nol orde r pada $s = s_1$ *jika 1/G(s) memiliki kutub orde ke-r pada* $s = s_1$.

Persamaan Differensial

Umumnya persamaan differensial homogen untuk sistem berorde-n ditulis

$$a_{n+1} \frac{dy^n(t)}{dt^n} + a_n \frac{dy^{n-1}(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_2 \frac{dy(t)}{dt} + a_1 y(t) = f(t) \qquad (2\text{-}2)$$

Persamaan differensial ini disebut sebagai persamaan differensial linear jika koefisien a_1, a_2,..., a_{n+1}. bukan fungsi dari *y(t).* Sebagai contoh, rangkaian listrik *RLC* seri dapat digambarkan dalam bentuk persamaan differensial berikut

$$Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int i(t)dt = v(t)$$

dengan *R* adalah resistansi, *L* induktansi, *C* kapasitansi, *i(t)* arus dalam jaringan, dan *v(t)* sebagai tegangan yang diberikan.

Definisi Alih-ragam Laplace

Diberikan suatu fungsi nyata *f(t)* yang memenuhi kondisi

$$\int_0^\infty \left| f(t)e^{-\sigma t} \right| dt < \infty$$

untuk σ bilangan nyata terbatas, maka alih-ragam Laplace didefinisikan sebagai

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt$$

atau *F(s) = alih ragam Laplace* dari *f(t)* = [f(t)]

Peubah s disebut sebagai operator Laplace, berupa peubah kompleks, $s = \sigma + j\omega$.

Untuk memudahkan penerapan alih-ragam Laplace, dibawah ini diberikan tabel teorema alih-ragam Laplace :

Tabel 2-1 Teorema alih-ragam Laplace :

Perkalian dengan konstanta	[kf(t)] = kF(s)
Penjumlahan dan beda	[f_1(t) + f_2(t)]=F_1(s)+F_2(s)
Differensiasi	$\left[\dfrac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f^{(1)}(0)$ $- \cdots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$ *dengan* $f^{(k)}(0) = \dfrac{d^k f}{dt^k}(0)$
Pergeseran kompleks	$\left[e^{\pm at} f(t)\right] = F(s \mp a)$
Integral	$\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right] = \dfrac{F(s)}{s}$
Teori nilai-akhir	$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$

Tabel 2-2 *Alih-ragam Laplace suatu fungsi*

Fungsi	***Bentuk***	***Alih-ragam Laplace***
Unit Impuls	$\delta(t)$	1
Unit Step	u(t)	1/s
Unit Ramp	t	$1/s^2$
Polinomial	t^2	$n!/s^{n+1}$
Eksponensial	e^{-at}	$\dfrac{1}{s+a}$
Gel. sinus	sin ωt	$\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$
Gel. cosinus	cos ωt	$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$
Gel sin teredam	$e^{-at}\sin\omega t$	$\dfrac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
Gel. cos teredam	$e^{-at}\cos\omega t$	$\dfrac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$

Alih-ragam Laplace balik

dengan ekspansi pecahan bagian

Dalam kebanyakan sistem kontrol, evaluasi alih-ragam Laplace balik tidak langsung menggunakan integral balik persamaan (2-1). Sebaiknya, operasi alih ragam Laplace balik yang didalamnya berupa fungsi rasional diselesaikan menggunakan tabel alih-ragam Laplace dan ekspansi pecahan-bagian. Ketika solusi persamaan differensial bentuk alih-ragam Laplace merupakan fungsi rasional, maka solusi dapat ditulis sebagai

$$X(s) = \frac{Q(s)}{P(s)}$$

dengan *Q(s)* dan *P(s)* adalah polinomial dalam s. Dengan anggapan bahwa orde dari *P(s)* lebih besar dari *Q(s)*. Polinomial *P(s)* ditulis

$$P(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n$$

dengan $a_1, a_2, \ldots, a_n$ adalah koefisien nyata. *Nol* dari *Q(s)* dapat berupa nyata atau pasangan kompleks, orde tunggal atau rangkap.

Ekspansi Pecahan-bagian

Untuk semua pole X(s) adalah sederhana dan nyata

Bentuk :

$$X(s) = \frac{Q(s)}{P(s)} = \frac{Q(s)}{(s+s_1)(s+s_2)\cdots(s+s_i)\cdots(s+s_n)}$$

dengan $s_1 \neq s_2 \neq \cdots \neq s_n$. Dengan menerapkan ekspansi pecahan-bagian, maka persamaan ini ditulis

$$X(s) = \frac{k_1}{(s+s_1)} + \frac{k_2}{(s+s_2)} + \cdots + \frac{k_i}{(s+s_i)} + \cdots + \frac{k_n}{(s+s_n)}$$

dengan

$$k_i = \left[(s+s_i)\frac{Q(s)}{P(s)}\right]_{s=-s_i}$$

Ekspansi saat pole dari X(s) berbentuk orde rangkap

Bentuk :

$$X(s) = \frac{Q(s)}{P(s)} = \frac{Q(s)}{(s+s_i)^r}$$

Maka

$$X(s) = \frac{A_1}{(s+s_i)} + \frac{A_2}{(s+s_i)^2} + \cdots + \frac{A_r}{(s+s_i)^r}$$

dengan

$$A_r = \left[(s+s_i)X(s)\right]_{s=-s_i}$$

$$A_{r-1} = \frac{d}{ds}\left[(s+s_i)^r X(s)\right]_{s=-s_i}$$

$$A_{r-2} = \frac{1}{2!}\frac{d^2}{ds^2}\left[(s+s_i)^r X(s)\right]_{s=-s_i}$$

$$\vdots$$

$$A_1 = \frac{1}{(r-1)!}\frac{d^{r-1}}{ds^{r-1}}\left[(s+s_i)^r X(s)\right]_{s=-s_i}$$

Aplikasi Alih-ragam Laplace Untuk Solusi Pers. Differensial

Persamaan differensial dapat diselesaikan menggunakan metode alih-ragam Laplace dengan bantuan tabel alih-ragam Laplace. Prosedur ringkasnya sebagai berikut

1. Ubah persamaan differensial ke bentuk alih ragam Laplace menggunakan tabel alih ragam Laplace
2. Manipulasikan persamaan aljabar hasil alih ragam dan selesaikan untuk variabel keluaran
3. Bentuklah ekspansi pecahan-bagian sehingga alih ragam Laplace balik dapat diperoleh dari tabel Laplace
4. Lakukan alih ragam balik

Teori Dasar Matriks

Dalam mempelajari sistem kontrol modern, notasi matriks sering kali digunakan untuk menyederhanakan persamaan matematika yang cukup rumit. Notasi matriks umumnya menjadikan persamaan lebih mudah unutk ditangani dan dimanipulasikan.

Perhatikan sejumlah n persamaan aljabar simultan :

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = y_1 \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = y_2 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = y_n
\end{aligned}
\tag{2-2}
$$

Kita dapat menggunakan persamaan matriks untuk menggambarkan persamaan (2-2) untuk penyerdehanaan sebagai

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{y}$$

Simbol **A**, **x** dan **y** didefinisikan sebagai matriks, yang berisi koefisien dan variabel persamaan asli elemennya. Dalam bentuk aljabar matriks dapat dinyatakan sebagai : *Perkalian matriks A dan x sama dengan matriks* y. Ketiga matriks tersebut didefinisikan sebagai berikut

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Definisi Matriks

Matriks adalah sekumpulan elemen yang tersusun dalam larik persegi panjang atau persegi. Kita perlu mengetahui perbedaan antara matriks dan determinan :

MATRIKS	*DETERMINAN*
Larik bilangan atau elemen adalah *n* baris dan *m* kolom Tidak memiliki nilai, meskipun matriks persegi (*n*=*m*) memiliki determinan	Larik bilanagn atau lemen dengan *n* baris dan *n* kolom (selalu persegi) Memiliki nilai

Elemen Matriks

Sebuah matriks A dapat ditulis

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad (2\text{-}3)$$

dengan a_{ij} menunjukkan sebuah elemen yang berada di baris ke-*i* dan kolom ke-*j*.

Orde Matriks

Or*de matriks* menunjukkan jumlah total baris dan kolom matriks. Sebagai contoh matriks persamaan (2-3) merupakan matriks berorde 3 x 3. Pada umumnya, matriks dengan *n* baris dan *m* kolom disebut matrisk berorde *n x m*.

Matriks Persegi

Matriks persegi adalah salah satu matriks yang memiliki jumlah baris dan kolom yang sama.

Matriks Kolom

Matriks kolom adalah salah satu matriks yang memeiliki satu kolom dan lebihdari satu baris, yaitu matriks m x 1, m > 1. Matriks kolom ini disebut sebagai vektor kolom atau sederhananya vektor-m jika ada m baris dan satu kolom.

Matriks Baris

Matrisk baris adalah salah satu matriks yang memiliki satu baris dan lebih dari satu kolom, yaitu matriks 1 x n, dengan n > 1. Matriks baris sering disebut juga sebagai vektor baris.

Matriks Diagonal

M*atriks diagronal* adalah matrisk persegi dengan $a_{ij} = 0$ untuk semua $i \neq j$. Misalkan matriks A berikut

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Matriks Identitas

Matrisk identitas adalah matrisk diagonal dengan semua elemen pada diagonal utama sama dengan 1. Matriks identitas atau matriks satuan ini sering ditandai dengan ***I*** atau ***U***.

Contoh matriks satuan atau matrisk identitas ditulis :

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Determinan matriks

Determinan suatu matriiks persegi A didfinisikan sebagai

$$\textit{det}\ \mathrm{A} = \Delta_{\mathrm{A}} = |\mathrm{A}|$$

Sebagai contoh determinan matriks A persmaan (2-3) adalah

$$
\begin{aligned}
|A| &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\
&= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\
&= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})
\end{aligned}
$$

Matriks Singular

Matriks dikatakan sebagai *matriks singular* jika nilai determinan matriks tresebut adalah nol. Jika matriks persegi memiliki determinan bukan nol, maka matriks tersebut disebut *matriks nonsingular*.

Transpose Matriks

Transpose matriks A didefinisikan sebagai matriks hasil pertukaran baris yang beseuaian dan kolom matriks A. Misalkan A merupakan matriks n x m yang digambarkan oleh

$$
A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}
$$

maka tranpsose dari A ditandai dengan A^T diberikan

$$
A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}
$$

Beberapa sifat transpose matriks :

1. $(A^T)^T = A$
2. $(kA)^T = kA^T$, dengan k adalah skalar

3. $(A+B)^T = A^T + B^T$

4. $(AB)^T = B^T A^T$

Adjoint Matriks

Misalkan A adalah matriks A persegi berorde n. *Adjoint matriks* A ditandai

$$Adj\ A = [A_{ij}\ \ dari\ \det A]_{n,n}$$

dengan A_{ij} menunjukkan kofaktor dari a_{ij}.

Invers Matriks

Dalam aljabar untuk besaran skalar, ketika kita menulis y = ax, maka memeprlakukan bahwa x = y/a adalah benar juga. Dalam aljabar matriks, jika

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{y}$$

Maka dimungkinkan untuk menulis

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{A^{-1}y}$$

dengan A^{-1} disebut sebagai invers matriks A. Keadaan A^{-1} ada nilainya adalah

1. A adalah matriks persegi
2. A harus nonsingular
3. Jika A^{-1}, maka harganya adalah

$$A^{-1} = \frac{Adj\ A}{|A|}$$